PC* 1 : Programme de colles de mathématiques n°18

Semaine du 17 *mars* 2025 *au* 21 *mars* 2025

Calcul différentiel : tout

Questions de cours Pas de questions de cours

Programme de PC

A - Dérivabilité des fonctions vectorielles

L'objectif de cette section est de généraliser aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ la notion de dérivée d'une fonction numérique.
Toutes les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Dérivabilité en un point. Dérivabilité sur un intervalle.	Définition par le taux d'accroissement, caractérisation par le développement limité d'ordre un. Traduction par les coordonnées dans la base canonique. Interprétation cinématique.
Combinaison linéaire de fonctions dérivables. Dérivée de $L(f)$, où L est linéaire et f à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dérivée de $B(f,g)$, où B est bilinéaire, de $M(f_1,\dots,f_p)$, où M est p-linéaire, et f, g, $f_1,\dots,f_p$ à valeurs vectorielles. Dérivée de $f\circ\varphi$ où φ est à valeurs réelles et f à valeurs vectorielles. Fonction de classe $\mathscr{C}^k$, de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un intervalle.	La démonstration n'est pas exigible. Application au produit scalaire et au déterminant.

B - Fonctions de plusieurs variables

Les dérivées partielles d'une fonction numérique définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ont été introduites en première année. L'objectif de cette section est d'approfondir et de généraliser cette étude aux fonctions de $p \geqslant 2$ variables.
L'étude d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$ se ramenant à celle de ses coordonnées, cette section se consacre à l'étude des fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$. Elle est axée sur la mise en place d'outils permettant de traiter des applications du calcul différentiel à l'analyse et la géométrie. On se limite en pratique au cas $p = 2$ ou $p = 3$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
a) Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$	
Dérivée en un point selon un vecteur.	Notation $D_v f(a)$.
Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Une fonction est dite de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent et sont continues sur Ω. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.	Notation $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a)$. On peut aussi utiliser $\partial_i f(a)$.
Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω admet en tout point a de Ω un développement limité d'ordre 1. Différentielle de f en a.	La démonstration n'est pas exigible. Une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω est continue sur Ω. Elle est définie comme la forme linéaire sur $\mathbb{R}^p$: $$\mathrm{d}f(a) : (h_1,\ldots,h_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, h_i.$$ Notation $\mathrm{d}f(a)\cdot h$.
b) Règle de la chaîne	
Dérivée de $t \mapsto f\big(x_1(t),\ldots,x_p(t)\big)$. Application au calcul des dérivées partielles de : $$(u_1,\ldots,u_n) \mapsto f\big(x_1(u_1,\ldots,u_n),\ldots,x_p(u_1,\ldots,u_n)\big).$$	En pratique, on se limite à $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$. Les étudiants doivent connaître le cas particulier des coordonnées polaires.
Caractérisation des fonctions constantes sur un ouvert convexe.	
c) Gradient	
Dans $\mathbb{R}^p$ muni de sa structure euclidienne canonique, gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Pour $h \in \mathbb{R}^p$, relation $\mathrm{d}f(a)\cdot h = \langle \nabla f(a), h\rangle$.	Le gradient est défini par ses coordonnées. Notation $\nabla f(a)$. Interprétation géométrique du gradient : si $\nabla f(a) \neq 0$, il est colinéaire au vecteur unitaire selon lequel la dérivée de f en a est maximale, et de même sens.
d) Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$	
Dérivées partielles d'ordre 2 d'une fonction définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$.	Notations $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.
Théorème de Schwarz.	La démonstration est hors programme.
Matrice hessienne en un point a d'une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notation $H_f(a)$.
Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^\top h + \tfrac{1}{2} h^\top H_f(a) h + \mathrm{o}(\\|h\\|^2).$$	La démonstration est hors programme. Expression en termes de produit scalaire.
e) Extremums d'une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$	
Extremum local, global. Point critique d'une application de classe $\mathscr{C}^1$.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Si une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ admet un extremum local en un point a, alors a est un point critique.	
Si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et a un point critique de f : – si $H_f(a) \in \mathscr{S}_p^{++}(\mathbb{R})$, alors f atteint un minimum local strict en a ; – si $H_f(a) \notin \mathscr{S}_p^{+}(\mathbb{R})$, alors f n'a pas de minimum en a.	Adaptation à l'étude d'un maximum local. Explicitation pour $p = 2$ (trace et déterminant).
	Exemples de recherche d'extremums globaux sur une partie de $\mathbb{R}^p$.

Extrait du programme de Sup

Fonctions de deux variables

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
b) Dérivées partielles	
Dérivées partielles en un point d'une fonction f définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.	Notations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. L'existence des dérivées partielles n'entraîne pas la continuité.
Fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert.	Définition par la continuité des dérivées partielles. La notion de fonction différentiable est hors programme.
Développement limité à l'ordre 1 au point (x_0, y_0) d'une fonction f de classe $\mathscr{C}^1$: $$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k + o(\lVert(h,k)\rVert).$$	Démonstration hors programme. On met en évidence l'idée de l'approximation linéaire de $f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0, y_0)$ et l'interprétation de $$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$ comme équation du plan tangent en (x_0, y_0) à la surface d'équation $z = f(x, y)$.
Gradient d'une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Expression du développement limité à l'aide du gradient.	Notation $\nabla f(x_0, y_0)$. Le gradient de f en (x_0, y_0) définit la direction dans laquelle f croît le plus vite.